1.20 Çözümlü Problemler

(1) $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonu için

(a) $f(\frac{\pi}{6})$;	(b) $f(\frac{\pi}{4})$;	(c) $f(\frac{\pi}{3})$;
(d) $f(\frac{\pi}{2})$;	(e) $f([0,\pi])$;	(f) $f((0,\pi))$;
(g) $f([0,\frac{\pi}{6}])$;	(h) $f([0,2\pi])$;	(i) $f^{-1}(0)$;
(j) $f^{-1}(\frac{1}{2})$;	(k) $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$;	(l) $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(m) $f^{-1}([-1,1])$;	(n) $f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$;	(o) $f^{-1}([-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}])$.

ifadelerini bulunuz.

Çözüm: Trigonometri cetvelini kullanarak
(a) $f(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
(c) $f(\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$; (d) $f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}=0$;
(e) $f(0)=\cos 0=1$, $f(\pi)=\cos\pi=-1$ olduğundan ve hem de x, $[0,\pi]$ aralığında değışdiğinde cosinüs fonksiyonunun değerleri -1 ve 1 arasında değiştiğinden $f([0,\pi])=\{\cos x:\ 0\le x\le\pi\}=[-1,1]$ dir. Benzer şekilde;
(f) $f((0,\pi))=\{\cos x:\ 0<x<\pi\}=(-1,1)$;

(g) $f([0,\frac{\pi}{6}])=\{\cos x:\ 0\le x\le\frac{\pi}{6}\}=[\frac{\sqrt{3}}{2},1]$;
(h) $f([0,2\pi])=\{\cos x:\ 0\le x\le 2\pi\}=[-1,1]$;
(i) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ iken $\cos x=0$ olduğundan $f^{-1}(0)=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=0\}=\{\frac{\pi}{2}+k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;
(j) $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ iken $\cos x=\frac{1}{2}$ olduğundan, $f^{-1}(\frac{1}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{1}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$ olur. Benzer şekilde;
(k) $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;
(l) $f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\}=\{\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$;
(m) Görüntü kümesinin tanımı gereğince $f^{-1}([-1,1])=\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)=\cos x\in[-1,1]\}$ dir. $f^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ olduğunu gösterelim. $x\in f^{-1}([-1,1])$ ve $\cos x=\alpha$ olsun. Bu durumda $f(x)=\alpha,\ \ \alpha\in[-1,1]$ olduğundan $x=\arccos\alpha+2k\pi\in\mathbb{R}$ ve dolayısıyla $f^{-1}([-1,1])\subset\mathbb{R}$ dir. Öte yandan $x\in\mathbb{R}$ ise $\cos x\in[-1,1]$ olur ve buradan da $x\in f^{-1}([-1,1])$ veya $\mathbb{R}\subset f^{-1}([-1,1])$ olduğu elde edilir. O halde, $f^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ dir.
(n) $f^{-1}([-1,1])=\{x\in\mathbb{R}:\ \cos x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]\}$ dir. $x\in f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$ ve $\cos x=\alpha$ olsun. Bu durumda $\alpha\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ ve $x=\arccos\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ dir. Eğer, α sayısı $[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ aralığında değişiyorsa $\cos x$ fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğundan x değişkeni $[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ ve $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]$ aralıklarında değişir. O halde,

$$f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])\subset\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\Big)$$

olur. Öte yandan, $x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]$ veya $x\in[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ ise $\cos x\in[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$ olduğundan

$$\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\Big)\subset[f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])$$

elde edilir. Son iki sonuçtan

$$f^{-1}([0,\frac{\sqrt{3}}{2}])=\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi]\Big)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

(o) $f^{-1}([-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$ olduğu gösterilir. $\diamond$

(2) Aşağıda tanımlanan $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonlarından hangisi birebir, örten ve birebir örtendir.

(a) $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$; (b) $f(x) = 1 - x^2$; (c) $f(x) = |x|$;
(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + 1)$; (e) $f(x) = 2^{x-1}$

Çözüm: (a) $y = 1$ için $\cos\frac{\pi}{2}x = 1$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in [-1, 1)$ için $\cos\frac{\pi}{2}x = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -\frac{2}{\pi}\arccos y$ ve $x_2 = \frac{2}{\pi}\arccos y$ çözümü bulunduğundan, $f(x) = \cos\frac{\pi}{2}x : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(b) $y = 1$ için $1 - x^2$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in [0, 1)$ için $1 - x^2 = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -\sqrt{1 - y}$ ve $x_2 = \sqrt{1 - y}$ çözümleri bulunduğundan $f(x) = 1 - x^2 : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(c) $y = 0$ için $|x| = 0$ denkleminin bir tek $x = 0 \in [-1, 1]$ çözümü ve $\forall y \in (0, 1]$ için $|x| = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde iki tane $x_1 = -y$ ve $x_2 = y$ çözümleri bulunduğundan, $f(x) = |x| : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu örtendir fakat birebir değildir.
(d) $\forall y \in [0, 1]$ için $\frac{1}{2}(x + 1) = y$ denkleminin $[-1, 1]$ aralığı içinde bir tek $x = 2y-1$ çözümü bulunduğundan, $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu birebir ve örtendir.
(e) $y \in [0, 1]$ olsun. $y \in [\frac{1}{4}, 1]$ için $2^{x-1} = y$ denkleminin bir tek $x = 1+\log_2 y \in [-1, 1]$ çözümü bulunur. $\forall x \in [-1, 1]$ için $\frac{1}{4} \leq 2^{x-1} \leq 1$ olduğundan $y \in [0, \frac{1}{4})$ için $2^{x-1} = y$ denkleminin $[-1, 1]$ içinde çözümü yoktur. O halde, $f(x) = 2^{x-1} : [-1, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonu birebirdir fakat örten değildir. $\diamond$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$ fonksiyonu için

(a) $f(3)$; (b) $f(a)+f(-a)$; (c) $f(b)-1$;

(d) $f(b-1)$; (e) $f(\frac{1}{c})$; (f) $\dfrac{1}{f(c)}$.

ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

(a) $f(3)=3$; (b) $f(a)+f(-a)=\dfrac{2a^2}{a^2-4}$;

(c) $f(b)-1=\dfrac{2}{b-2}$; (d) $f(b-1)=\dfrac{b-1}{b-3}$;

(e) $f(\frac{1}{c})=\dfrac{1}{1-2c}$; (f) $\dfrac{1}{f(c)}=\dfrac{c-2}{c}$.

(4) $$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & -1\le x<0 \text{ ise,}\\ \sin^2 x, & 0\le x\le \pi \text{ ise,}\\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \pi<x\le 5 \text{ ise.}\end{cases}$$
fonksiyonu için $f(-1)$, $f(\frac{-1}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$ ve $f(4)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonu $[-1,0)$ aralığında $f(x)=x^2+x-1$, $[0,\pi]$ aralığında $f(x)=\sin^2 x$ ve $(\pi,5]$ aralığında $f(x)=\frac{x-1}{x+5}$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre,

$$\begin{array}{lll} x=-1\in[-1,0) & \text{için} & f(-1)=(1)^2+(-1)+1=1,\\ x=\frac{-1}{2}\in[-1,0) & \text{için} & f(\frac{-1}{2})=(\frac{-1}{2})^2+(\frac{-1}{2})+1=\frac{3}{4},\\ x=0\in[0,\pi] & \text{için} & f(0)=\sin^2 0=0,\\ x=\frac{\pi}{4}\in[0,\frac{\pi}{4}] & \text{için} & f(\frac{\pi}{4})=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2},\\ x=4\in(\pi,5] & \text{için} & f(4)=\dfrac{4-1}{4+1}=\dfrac{3}{5}\end{array}$$

bulunur. $\diamond$

(5) $f(x)=\sin x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ fonksiyonu için

$$f(2x)=2f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}$$

denkleminin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm: $f(2x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$ ve $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ olduğundan dolayı

$$f(2x) = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} = 2f(x)\sqrt{1-[f(x)]^2}$$

bulunur. $\diamond$

(6) $f(1+2x) = \sin x - x^3 + \tan\frac{x-1}{2} + 1$ olduğuna göre, $f(x)$ i bulunuz.

Çözüm: $1+2x = u$ olsun. Bu durumda, $x = \frac{1}{2}(u-1)$ ve $x-1 = \frac{u-3}{2}$ olduğundan,

$$f(u) = \sin\tfrac{u-1}{2} - \frac{(u-1)^3}{8} + \tan\tfrac{u-3}{4} + 1$$

bulunur. $\diamond$

(7) Aşağıdaki kurallarla tanımlanan reel değerli fonksiyonların tanım bölgelerini bulunuz.

(a)	$f(x) = \sqrt{9-x^2} + \log\frac{x+1}{x-2}$;	(b)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;
(c)	$f(x) = \log(3\sin^2 x - 4)$;	(d)	$f(x) = \cot \pi x + \arccos 2^x$;
(e)	$f(x) = \arccos\frac{2x}{1+x^2} + \log(\sin\frac{\pi}{x})$;	(f)	$f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;
(g)	$f(x) = \log_{x+3}(x^2-1)$;	(h)	$f(x) = (\sin x - 2\sin^2 x)^{-3/4}$;
(i)	$f(x) = \arccos x - \arcsin(3-x)$;	(j)	$f(x) = \tan(2\arccos x)$;
(k)	$f(x) = \log(1 - 2\text{arccot}x)$;	(l)	$f(x) = \dfrac{\arcsin(0,5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$;
(m)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$;	(n)	$f(x) = \sqrt{-\sin^2 x - \cos^2 3x}$;
(o)	$f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$;	(p)	$f(x) = \dfrac{\log_{2x} 3}{\arccos(2x-1)}$;
(r)	$f(x) = (\lvert x\rvert - x)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$.		

Çözüm: Problemin çözümünde reel değerli f ve g fonksiyonlarının tanım bölgeleri ile $f+g$, $f-g$, $f.g$ ve f/g fonksiyonlarının tanım bölgeleri arasında

$$\mathcal{D}(f+g)=\mathcal{D}(f-g)=\mathcal{D}(f.g)=\mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$$
$$\mathcal{D}(f/g)=\mathcal{D}(f)\cap(\mathcal{D}(g)\setminus\{x\in\mathcal{D}(g):\ g(x)=0\})$$

mevcut bağıntılarından faydalanacağız.

(a) $\mathcal{D}(\sqrt{9-x^2})=\{x:\ 9-x^2\geq 0\}=[-3,3]$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\log\frac{x+1}{x-2})&=\{x:\ \frac{x+1}{x-2}>0\}\\&=\{x:\ (x+1>0,\ x-2>0)\vee(x+1<0,\ x-2<0)\}\\&=\{x:\ x>2\vee x<-1\}=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f)=[-3,3]\cap\big((-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\big)=[-3,-1)\cup(2,3]$$

elde edilir.

(b) $\mathcal{D}(\sqrt{x})=[0,+\infty)$, $\mathcal{D}(\sin\pi x)=\mathbb{R}$ ve $\mathcal{D}(\sin\pi x)\setminus\{x:\ \sin\pi x=0\}=\mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\}$ olduğundan,

$$\mathcal{D}(f)=[0,+\infty)\cap(\mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\})=(0,+\infty)\setminus\{k:\ k\in\mathbb{N}\}.$$

(c) $\mathcal{D}(f)=\{x:\ 3\sin^2-4>0\}=\{x:\ |\sin x|>\frac{2}{\sqrt{3}}\}$. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$ ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için $|\sin x|\leq 1$ olduğundan, $\mathcal{D}(f)=\emptyset$ buluruz.

(d) $\mathcal{D}(\cot\pi x)=\{x:\ \sin\pi x\neq 0\}=\{x:\ x\neq k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$$=\mathbb{R}\setminus\{k:\ k\in\mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{D}(\arccos 2^x)=\{x:\ -1\leq 2^x\leq 1\}=(-\infty,0]$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f)=(\mathbb{R}\setminus\{k\in\mathbb{Z}\}\cap(-\infty,0]=(-\infty,0)\setminus\{k:\ k=-1,-2,\ldots\}.$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\arccos \tfrac{2x}{1+x^2}) &= \{x: \ -1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1\} \\
&= \{x: \ -1 - x^2 \le 2x \le 1 + x^2\} \\
&= \{x: \ -(x-1)^2 \le 0 \quad \text{veya} \quad (x-1)^2 \ge 0\} = \mathbb{R}, \\
\mathcal{D}(\log(\sin \tfrac{\pi}{x})) &= \{x: \ \sin \tfrac{\pi}{x} > 0\} = \{x: \ 2k\pi < \tfrac{\pi}{x} < \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2k+1}, \tfrac{1}{2k})\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2(k+1)}, -\tfrac{1}{2k+1})\Big)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
D(f) &= \mathbb{R} \cap \Big(\big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2k+1}, \tfrac{1}{2k})\big) \cup \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2(k+1)}, -\tfrac{1}{2k+1})\big)\Big) \\
&= \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2k+1}, \tfrac{1}{2k})\big) \cup \big(\bigcup_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2(k+1)}, -\tfrac{1}{2k+1})\big).
\end{aligned}
$$

(f) $\mathcal{D}(f) = \{x: \ \arcsin(\log_2 x) \ge 0\} = \{x: \ 0 \le \log_2 x \le 1\}$

$$= \{x: \ 1 \le x \le 2\} = [1, 2].$$

(g) $f(x) = \dfrac{\log(x^2 - 1)}{\log(x+3)}$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &= \{x: \ x^2 - 1 > 0 \quad \text{ve} \quad x + 3 > 0 \quad \text{ve} \quad x + 3 \ne 1\} \\
&= \{x: \ |x| > 1 \quad \text{ve} \quad x > -3 \quad \text{ve} \quad x \ne -2\} \\
&= (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty).
\end{aligned}
$$

(h) $\mathcal{D}(f) = \{x: \ \sin x - \sin^2 x > 0\} = \{x: \ \sin x(1 - 2\sin x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
&= \{x: \ (\sin x > 0, \ 1 - 2\sin x > 0) \quad \text{veya} \quad (\sin x < 0, 1 - 2\sin x < 0)\} \\
&= \{x: \ 0 < \sin x < \tfrac{1}{2} \quad \text{veya} \quad (\sin x < 0, \sin x > \tfrac{1}{2})\} \\
&= \{x: \ 0 < \sin x < \tfrac{1}{2}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \big((2n\pi, \tfrac{\pi}{6} + 2n\pi) \cup (\tfrac{5\pi}{6} + 2n\pi, \pi + 2n\pi)\big).
\end{aligned}
$$

(i) $\mathcal{D}(\arccos x) = \{x : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$,
$\mathcal{D}(\arcsin(3-x)) = \{x : -1 \leq 3 - x \leq 1\} = [2, 4]$
olduğundan, $\mathcal{D}(f) = [-1, 1] \cap [2, 4] = \emptyset$ olur.

(j) $\mathcal{D}(f) = \{x : 0 \leq 2\arccos x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < 2\arccos x \leq \pi\}$

$$= \{x : 0 \leq \arccos x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} < arccosx \leq \frac{\pi}{2}\}$$
$$= [-1, 1] \setminus \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

elde edilir.

(k) $\mathcal{D}(\log u) = (0, \infty)$ olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = \{x : 0 < 1 - 2\text{arccot}x\} = \{x : \frac{1}{2} > \text{arccot}x\}$$
$$= \{x : \cot\tfrac{1}{2} < x < +\infty\} = (\cot\tfrac{1}{2}, +\infty)$$

olur.

(l) $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ve

$$\mathcal{D}(\arcsin(0,5x - 1) = \{x : -1 \leq 0,5x - 1 \leq 1\} = [0, 4]$$
$$\mathcal{D}(\sqrt{x^2 - 3x + 1}) = \{x : x^2 - 3x + 1 \geq 0\}$$
$$= (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = [0, 4] \cap \big((-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)\big)$$
$$= [0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 4]$$

elde edilir.

(m) $\arcsin(2 - x) = 0$ denkleminin kökü $x = 2$ ve

$$\mathcal{D}(\sqrt{4 - x^2}) = \{x : 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$$
$$\mathcal{D}(\arcsin(2 - x)) = \{x : -1 \leq 2 - x \leq 1\} = [1, 3]$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = [-2,2] \cap ([1,3] \setminus \{2\}) = [1,2)$$

elde edilir.

(n) $\mathcal{D}(f) = \{x : -\sin^2 x - \cos^2 3x \geq 0\}$

$$\begin{aligned} &= \{x : \sin 2x = 0 \wedge \cos 3x = 0\} \\ &= \{x = \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\frac{k\pi}{2} : 3k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{2}\} \end{aligned}$$

olur.

(o) $6 - 35x - 6x^2 = 0$ denkleminin kökleri $x = -6$ ve $x = \frac{1}{6}$ ve

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\sqrt{\cos x - \tfrac{1}{2}}) &= \{x : \cos x \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &= \{x : -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}, \\ \mathcal{D}(\sqrt{6 - 35x - 6x^2}) &= \{x : 6 - 35x - 6x^2 \geq 0\} \\ &= \{x : -6 \leq x \leq \tfrac{1}{6}\} = [-6, \tfrac{1}{6}] \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= (-6, \tfrac{1}{6}) \cap \big(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi]\big) \\ &= (-6, -\tfrac{5\pi}{3}] \cup [-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{1}{6}) \end{aligned}$$

bulunur.

(p) $\arccos(2x-1) = 0$ denklemininin kökü $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ ve

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\log_{2x} 3) &= \{x : 2x > 0 \vee 2x \neq 1\} \\ &= (0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty), \\ \mathcal{D}(\arccos(2x-1)) &= \{x : -1 \leq 2x - 1 \leq 1\} = [0,1] \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{D}(f) = \big((0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, +\infty)\big) \cap [0, 1] = (0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1]$$

bulunur.

(q) $\forall x \in [0, +\infty)$ için $|x| - x = 0$ dir. Dolayısıyla, $f(x) = 0$ olduğundan $[0, +\infty) \subset \mathcal{D}(f)$ olduğu görülür. $\mathcal{D}(f)$ tanım bölgesine negatif x lerden yalnızca $\sin \pi x = 0$ denklemini sağlayanlar yani $x = k, k = -1, -2, \ldots$ noktaları aittir. Böylece,

$$\mathcal{D}(f) = \{k : k = -1, -2, \ldots\} \cup [0, +\infty)$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

(8) $y = f(u)$ fonksiyonunun tanım bölgesi $(0, 1)$ olduğunda

(a) $f(x^2)$; (b) $f(\cos x)$; (c) $f(\ln^2 x)$; (d) $f(\frac{[|x|]}{x})$

fonksiyonlarının tanım bölgelerini bulunuz.

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f(x^2)) = \{x : 0 < x^2 < 1\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ dir.

(b) $\mathcal{D}(f(\cos x)) = \{x : 0 < \cos x < 1\} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \big((-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \setminus \{2n\pi\}\big)$ dir.

(c) $\mathcal{D}(f(\ln^2 x)) = \{x : 0 < \ln^2 x < 1\} = \{x : 0 < |\ln x| < 1\} = (\frac{1}{e}, 1) \cup (1, e)$ olur.

(d) $x = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ noktaları için $\frac{[|x|]}{x} = 1$ dir. $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ noktaları için $0 < \frac{[|x|]}{x} < 1$ ve $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{N}_-$ ($\mathbb{N}_- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$) noktaları için $\frac{[|x|]}{x} > 1$ olduğu açıktır. O halde, $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (n, n+1)$ olur. $\diamond$

(9) Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olup olmadığını araştırınız.

(a) $f(x) = \log x^2$ ve $g(x) = 2 \log |x|$;

(b) $f(x) = \log x^2$ ve $g(x) = 2 \log x$;

(c) $f(x) = \arcsin x$ ve $g(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0, 1]$;

(d) $f(x) = \arcsin x$ ve $g(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 0]$;

Çözüm: Tanıma göre (Bkz. Tanım 1.4.8) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için eğer, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}$ için $f(x) = g(x)$ ise f ve g fonksiyonları eşittir.

(a) $\mathcal{D}(f) = \{x : x^2 > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $\mathcal{D}(g) = \{x : |x| > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ve $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ için $f(x) = \log x^2 = \log|x|^2 = 2\log|x| = g(x)$ olur. O halde, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ üzerinde f ve g fonksiyonları eşittir.

(b) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ve $D(g) = \{x : x > 0\} = (0, +\infty)$ dir. $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$ olduğundan, f ve g fonksiyonları eşit değildir.

(c) $0 \leq x \leq 1$ ve $y = \arcsin x$ olsun. Bu durumda, $\sin y = x$ ve $0 \leq y \leq \pi/2$ olur. Buradan, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ dir. $\forall y \in [0, \pi/2]$ için $\cos y \geq 0$ olduğundan,

$$\cos^2 y = 1 - x^2 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

dir. Böylece, $\forall x \in [0, 1]$ için $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ olduğu, yani $[0, 1]$ üzerinde f ve g fonksiyonlarının eşit olduğu görülür.

(d) $-1 \leq x \leq 0$ ve $y = \arcsin x$ olsun. O halde,(c) de olduğu gibi $\cos^2 y = 1 - x^2, \; -\pi/2 \leq y \leq 0$ olduğu elde edilir. Her $y \in [-\pi/2, 0]$ için $\cos y \geq 0$ olduğundan, $\cos^2 y = 1 - x^2 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ elde edilir. Demek ki, her $x \in [-1, 0]$ için $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ dir. Bundan dolayı $[-1, 0]$ üzerinde f ve g fonksiyonları eşit değildir. $\diamond$

(10) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ve $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ fonksiyonlarını ve tanım bölgelerini bulunuz.

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$;

(b) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$;

(c) $f(x) = 10^x, \quad g(x) = \log x$;

(d) $f(x) = x^5, \quad g(x) = x + 5$;

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise.} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise;} \end{cases}$

(f) $f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = \sin x$.

Çözüm: (a) $f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \mathcal{D}(f \circ g) = [0, +\infty)$

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(b) $f(g(x)) = \sqrt{1 - (g(x))^2} = \sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \mathcal{D}(f \circ g) = [-1, 1]$ dir. Benzer şekilde, $g(f(x)) = |x|, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = [-1, 1]$ olur.
(c) $f(g(x)) = 10^{g(x)} = 10^{\log x} = x, \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}_+,$

$$g(f(x)) = \log f(x) = \log 10^x = x, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(d) $f(g(x)) = (g(x))^5 = (x + 5)^5, \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R},$

$$g(f(x)) = f(x) + 5 = x^5 + 5, \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

(e) $\forall x \in [0, +\infty)$ için $g(x) = 0$ olduğundan, $f(g(x)) = 0,\ x \in [0, +\infty)$ elde edilir. $\forall x \in (-\infty, 0)$ için $g(x) = x^2 \neq 0$ olduğundan, $f(g(x)) = g(x) = x^2,\ x \in (-\infty, 0)$ elde edilir.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty) \text{ ise,} \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \text{ ise.} \end{cases} \quad \text{ve } \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, $g(f(x)) = 0$ ve $\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$ olduğu gösterilir.
(f) $f(g(x)) = \ln(g(x))^2 = \ln(\sin^2 x), \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$g(f(x)) = \sin f(x) = \sin(\ln x^2), \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

bulunur. $\diamond$

(11) $f(x) = |x| + \sqrt{x^2 + 1}, \quad g(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 1}$ olsun.

(a) $x \neq 0$ için $g(\sqrt{x^2 + 1}) = f(x)$ olduğunu gösteriniz.

(b) $|x| \geq 1$ için $f(\sqrt{x^2-1}) = g(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ olduğu açıktır.

(a) $\forall x \neq 0$ için $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ ve $\sqrt{x^2} = |x|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x^2+1}) &= \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2 - 1} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{x^2+1} + |x| = f(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(b) $\forall |x| \geq 1$ için $\sqrt{x^2} = |x|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x^2-1}) &= \sqrt{x^2-1} + \sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2 + 1} = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2} \\ &= \sqrt{x^2-1} + |x| = g(x) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\diamond$

(12) Aşağıda verilen fonksiyonların çift olup olmadığını gösteriniz.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$;

(c) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$; (d) $f(x) = \begin{cases} x^4, & x > 0 \text{ ise,} \\ x^2, & x \leq 0) \text{ ise.} \end{cases}$

(e) $f(x) = |10 - x| - |10 + x|$; (f) $f(x) = \sin x + \cos x$;

(g) $f(x) = \sin^2 x - \cos^3 x$.

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ simetrik bir küme ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

olduğundan, f fonksiyonu tektir.

(b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2+1} = -\frac{x+1}{x^2+1}$$

dir. $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $x = 0$ noktasında sağlandığında, ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) \neq -f(x)$ olduğundan, f fonksiyonu ne tektir, ne de çifttir.

(c) $\forall x \geq 0$ için $x + \sqrt{x^2+1} \geq 1 > 0$ ve $\forall x < 0$ için $x + \sqrt{x^2+1} \geq x + \sqrt{x^2} = x + |x| = 0$ olduğundan $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$-x + \sqrt{x^2+1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

ve buradan da $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_2(-x+\sqrt{x^2+1}) = \log_2 \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= -\log_2(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x) \end{aligned}$$

olduğundan, f fonksiyonu tektir.

(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $f(-x) = \begin{cases} (-x)^4, & -x > 0\ , \\ (-x)^2, & -x \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} x^4, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

olduğundan, $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $x = 0$ ve $x = \pm 1$ noktalarında, $f(-x) = -f(x)$ denklemi ise, yalnızca $x = 0$ noktasında sağlandığından f fonksiyonu ne tektir, ne de çifttir.

(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = |10+x| - |10-x| = -f(x)$$

denklemi sağlandığından f fonksiyonu tektir.

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos$ dir. $f(-x) = f(x)$ denklemi yalnızca $\sin x = \dfrac{1}{2}$ denklemini sağlayan noktalarda, yani $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağlandı-ğından, $f(-x) = -f(x)$ denklemi ise, yalnızca $\cos x = \dfrac{1}{2}$ denklemini sağlayan noktalarda, yani $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ noktalarında sağlandığından f fonksiyonu ne tektir, ne de çiftir.

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = \sin^2(-x) - \cos^3(-x) = \sin^2 x - \cos^3 x = f(x)$$

olduğundan, f fonksiyonu çifttir. $\diamond$

(13) Simetrik bir küme üzerinde tanımlı bir fonksiyonun, biri çift biri tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde ifade edilebileceğini gösteriniz.

Çözüm: Simetrik bir $E \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. E üzerinde tanımlı

$$F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{ve} \quad G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. E üzerinde $F(x)$ fonksiyonu çift, $G(x)$ fonksiyonu ise tektir. Her $x \in E$ için

$$f(x) = F(x) + G(x)$$

şeklinde yazılabileceğinden istenen iddianın doğruluğu görülür. $\diamond$

(14) Aşağıda verilen önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) Eğer, φ çift ise $f[\varphi(t)]$ de çifttir.

(b) Eğer, $y = f(x)$ ve $x = \varphi(t)$ tek ise $y = f[\varphi(t)]$ çifttir.

(c) Eğer, $y = f(x)$ çift ve $x = \varphi(t)$ tek ise $y = f[\varphi(t)]$ çifttir.

(d) Eğer, f ve g çift ise $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları da çifttir.

(e) Eğer, f ve g çift (tek) ise $f.g$ ve f/g ($g(x) \neq 0$) fonksiyonları da çifttir.

(f) Eğer, f çift (tek) ve g tek (cift)ise $f.g$ ve f/g ($g(x) \neq 0$) fonksiyonları da tektir.

Çözüm: (c) ve (e) önermelerinin doğruluğunu görelim. Diğer önermelrin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.
(**c**) φ tek ve f çift olduğu, dolayısı ile

$$f[\varphi(-t)] = f[-\varphi(t)] = f[\varphi(t)]$$

dir. Bu ise $f[\varphi(t)]$ nin çift fonksiyon olması demektir.
(**e**) f ve g çift olsun. O halde,

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

olduğundan $f.g$ çifttir. Eğer, f ve g tek iseler

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = (-f(x)).(-g(x)) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

olduğundan $f.g$ çifttir. $\diamond$

(15) Problem (14) teki önermelerden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \sin x^2 + e^{-x^2} + x^4 - 6x^2 + 14;$

(b) $f(x) = \dfrac{\cos x^3 + 7x^{12}}{x^6 + \sin^2 x^3};$

(c) $f(x) = \tan(x^3) + 4x^7;$

(d) $f(x) = \sin mx \cos nx;$

(e) $f(x) = \sin^5 3x. \cos^2 6x;$

(f) $f(x) = x^3 \arctan 2x;$

(g) $f(x) = x^3 + \text{arccot}2x.$

Çözüm: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin x^2 + e^{-x^2}$ ve $G(x) = x^4 - 6x^2 + 14$ fonksiyonları çift olduklarından, $f(x) = F(x) + G(x)$ çifttir.
(b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dir. $F(x) = \cos x^3 + 7x^{12}$ ve $G(x) = x^6 + \sin^2 x^3$ fonksiyonları çift olduklarından, $f(x) = F(x)/G(x)$ çifttir.
(c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$dir. $F(x) = \tan x^3$ ve $G(x) = 4x^9$ fonksiyonları tek olduklarından $f(x) = F(x) + G(x)$ tektir.
(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin mx$ tek ve $G(x) = \cos nx$ çift olduğundan $f(x) = F(x).G(x)$ tektir.
(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ dir. $F(x) = \sin^5 3x$ tek ve $G(x) = \cos^2 6x$ çift olduklarından, $f(x) = F(x).G(x)$ tektir.

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ dir. $F(x) = x^3$ ve $G(x) = \arctan 2x$ tek olduklarından, $f(x) = F(x).G(x)$ çifttir.

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$dir.$F(x) = x^3$ ve $G(x) = \text{arccot} 2x$ tek olduklarından, $f(x) = F(x) + G(x)$ tektir. $\diamond$

(16) $f(x) = x^3 + x^2 - 3\sin x,\ x \in [0, +\infty)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde öyle genişletiniz ki, elde edilen fonksiyon tek olsun.

Çözüm: $x < 0$ olsun. O halde, $-x > 0$ ve

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 3\sin(-x)$$

dir. $f(x)$ fonksiyonunu $\mathbb{R}$ üzerinde genişlemesinin tekliği istenildiğinden $x < 0$ için

$$f(x) = -f(-x) = x^3 - x^2 - 3\sin x$$

denklemi sağlanmalıdır. O halde, istenen fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 3\sin x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ x^3 - x^2 - 3\sin x & x < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

biçimindedir. $\diamond$

(17) A, w ve φ ($A \neq 0,\ w > 0$), sabit reel sayılar olmak üzere $f(x) = A\sin(wx + \varphi)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

Çözüm: $T \neq 0$ sayısı f nin bir periyodu olsun. Bu durumda, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$A\sin[(wx + T) + \varphi] = A\sin(wx + \varphi)$$

veya

$$A\sin[(wx + \varphi) + wT] = A\sin(wx + \varphi)$$

denklemi sağlanır. Buradan, $wx + \varphi = \frac{\pi}{2}$ durumunda

$$A\sin(\frac{\pi}{2} + wT] = A\sin\frac{\pi}{2} = A$$

elde ederiz. Öte yandan, $A\sin(\dfrac{\pi}{2}+wT] = A\cos wT$ olduğundan $A\cos wT = A$ dır ve buradan da $wT = 2\pi n$ dir. Yani $T = \dfrac{2n\pi}{w}$, $n \in \mathbb{Z}$ olduğu elde edilir. Demek ki, eğer $T \neq 0$, f nin periyodu ise $T = 2n\pi/w$, $n \in \mathbb{Z}$ koşulunu sağlamak zorundadır. Bu koşulu sağlayan en küçük T pozitif sayısı $T = 2\pi/w$ biçimindedir. Şimdi $T = 2\pi/w$ sayısının f nin bir periyodu olduğunu gösterelim.

$$f(x+\frac{2\pi}{w}) = A\sin[w(x+\tfrac{2\pi}{w})+\varphi] = A\sin(wx+\varphi+2\pi)$$
$$A\sin(wx+\varphi) = f(x)$$

dir. Böylece, $T = 2\pi/w$ sayısının f nin esas periyodu olduğu anlaşılır.$\diamond$

(18) Problem (17) deki önermeden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

(a) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$;	(b) $f(x) = \sin 3x$;
(c) $f(x) = \cos\pi x$;	(d) $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2}+3)$;
(e) $f(x) = 6\cos(3\pi x/4)$;	(f) $f(x) = \tan 5x$.

Çözüm: **(a)** $f(x) = \cos\frac{x}{2} = \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$, $(A = 1,\ w = \frac{1}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{w} = 4\pi$ dir.

(b) $A = 1,\ w = 3$ ve $\varphi = 0$ olduğundan, f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{3}$ dür.

(c) $f(x) = \cos\pi x = \sin(\pi x+\frac{\pi}{2})$ $(A = 1,\ w = \pi,\ w = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$ dir.

(d) $A = 2,\ w = \frac{1}{2}$ ve $\varphi = 3$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{(1/2)} = 4\pi$ dir.

(e) $f(x) = 6\cos(\frac{3\pi x}{4}) = 6\sin(\frac{3\pi x}{4}+\frac{\pi}{2})$, $(A = 6,\ w = \frac{3\pi}{4},\ \varphi = \frac{\pi}{2})$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{(3\pi/4} = \frac{8}{3}$ dür.

(f) $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{\cos 5x} = \dfrac{\sin 5x}{\sin(5x+\frac{\pi}{2})}$ olduğundan f nin esas periyodu $T = \dfrac{2\pi}{5}$ dir. $\diamond$

(19) $f(x) = \sin x^2$ fonksiyonu periyodik değildir. Gösteriniz.

Çözüm: Önermenin doğruluğunu olmayana ergi yöntemi ile göstereceğiz. $f(x) = \sin x^2$ fonksiyonunun $T > 0$ periyotlu bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. O halde, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x^2 = \sin(x+T)^2 \tag{1.11}$$

denklemi sağlanmaktadır. $x = 0$ durumunda buradan $\sin T^2 = 0$ dir ve dolayısıyla, $T^2 = n\pi$ veya $T = \sqrt{n\pi}$, $n = 0, 1, \ldots$ bulunur. T nin bu değeri (1.11) de yerine yazılırsa $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\sin x^2 = \sin(x+\sqrt{n\pi})^2 = \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi) \tag{1.12}$$

denkleminin sağlandığı elde edilir. m herhangi bir tam sayı olmak üzere $2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2m\pi$ olacak şekilde bir x_0 sayısı seçelim. (Bu x_0 sayısı $x_0 \neq \dfrac{2m\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$, $n = 1, 2, \ldots$ biçiminde seçilebilir). Seçilen x_0 sayısı için

$$\sin x_0^2 \neq \sin(x_0^2 + 2x_0\sqrt{n\pi} + n\pi)$$

dir. Son ifade (1.12) ile çeliştiğinden kabulümüzün doğru olmadığı görülür. Demek ki, verilen fonksiyon periyodik değildir. $\diamond$

(20)

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonu verilsin. Her T rasyonel sayının $D(x)$ in bir periyodu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İki rasyonel sayının toplamı rasyonel ve irrasyonel sayı ile rasyonel sayının toplamı ise irrasyonel sayı olduğundan, her $T \in \mathbb{Q}$ için

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise.} \end{cases}$$

dir. Böylece, her $T \in \mathbb{Q}$ sayısı ve her $x \in \mathbb{R}$ için $D(x+T) = D(x)$ dir.$\diamond$

(21) $T = 2$ periyotlu f fonksiyonu $[0, 2)$ üzerinde $f(x) = x^2 - 1$ şeklinde tanımlıdır.

(a) f nin $[2k, 2k+2),\ k \in \mathbb{Z}$ aralığında ifadesini bulunuz.

(b) $f(7),\ f(\frac{15}{4}),\ f(-\sqrt{2}),\ f(\pi)$ ifadelerin değerlerini bulunuz.

Çözüm: **(a)** $x \in [2k, 2k+2),\ k \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde, $0 \leq x - 2k < 2$ olduğundan, $f(x-2k) = (x-2k)^2 - 1$ dir. Öte yandan, f, 2 peryodlu olduğundan, her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = f(x-2k)$ dir. Böylece, $x \in [2k, 2k+2),\ k \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = (x-2k)^2 - 1$ dir.
(b) $f(7) = f(7 - 2.3) = (7 - 2.3)^2 - 1 = 0,$
$f(\frac{15}{4}) = (\dfrac{15}{4} - 2)^2 = (\dfrac{7}{4})^2 - 1 = \dfrac{33}{16},$
$f(-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}+2) = (2-\sqrt{2})^2 - 1 = 5 - 4\sqrt{2},$
$f(\pi) = f(\pi - 2) = (\pi - 2)^2 - 1 = \pi^2 - 4\pi + 3$. $\diamond$

(22) Aşağıda verilen önermelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(a) İki artan (azalan) fonksiyonun toplamı da artandır (azalandır).

(b) $E \subset \mathbb{R}$ ve $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Eğer, f ve g E üzerinde artan ve $f(E),\ g(E) \subset \mathbb{R}_+$ ise, $f + g$ de E üzerinde artandır ve $(f+g)(E) \subset \mathbb{R}_+$ dır.

(c) Eğer, $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu artan(azalan) ise $-f$, E üzerinde azalandır (artandır).

(d) Eğer, $x = f(x)$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan (azalan) ve $y = F(x)$, $[f(\alpha), f(\beta)]$ $([f(\beta), f(\alpha)])$ üzerinde artan (azalan) ise $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artandır.

(e) Eğer, $x = f(t)$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan (azalan) ve $y = F(x)$, $[f(\alpha), f(\beta)]$ $\big([f(\beta), f(\alpha)]\big)$ üzerinde azalan (artan) ise $y = F(f(t))$,$[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır.

Çözüm: (e) önermesinin doğru olduğunu gösterelim. Diğer önermelerin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

$t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 < t_2$ olsun. Eğer, f, $[\alpha, \beta]$ üzerinde artan, F ise, $[f(\alpha), f(\beta)]$ üzerinde azalan ise, $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) < f(t_2) \Rightarrow F(f(t_1)) > F(f(t_2))$ olur. O halde, $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır.

Eğer, f, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalan, F ise $[f(\beta), f(\alpha)]$ üzerinde artan ise $t_1 < t_2 \Rightarrow f(t_1) > f(t_2) \Rightarrow F(f(t_2)) < F(f(t_1))$ olur. O halde, $y = F(f(t))$, $[\alpha, \beta]$ üzerinde azalandır. $\diamond$

(23) Problem (22) deki önermelerden yararlanarak aşağıda verilen fonksiyonların monotonluk karakterini inceleyiniz.

(a) $\quad f(x) = \arctan(x^2 - 2x + 3)$; $\qquad (b)$ $\quad f(x) = (x^3 + 4x + 6)\ln(x^2 + 4x + 6)$.

Çözüm: **(a)** $\quad y = \arctan t$ fonksiyonu artan ve $t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ üzerinde artan, $(-\infty, 1)$ üzerinde ise, azalan olduğundan f, $(1, +\infty)$ üzerinde artan $(-\infty, 1)$ üzerinde ise azalandır.

(b) $\quad y = t\ln t$ fonksiyonu $(1, +\infty)$ üzerinde pozitif ve artan iki fonksiyonun çarpımı olduğundan artandır. $t = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$ fonksiyonu $(-2, +\infty)$ üzerinde artan ve $(-\infty, -2)$ üzerinde ise, azalan pozitif değerli bir fonksiyon olduğu açıktır. $\ln t$ fonksiyonu $[2, +\infty)$ üzerinde pozitif değerli artan bir fonksiyon olduğundan f, $(-\infty, -2)$ üzerinde azalan, $(-2, +\infty)$ üzerinde ise artandır. $\diamond$

(24) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz.

Çözüm: $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Tanım gereği

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

olacağından $f^{-1}(\frac{1}{2}x - 3) = x$ dir. Bu eşitlikte $\dfrac{1}{2}x - 3 = y$ alınırsa $f{-}1(y) = 2(y + 3)$ elde edilir. O halde, f nin tersi $f^{-1}(x) = 2x + 6$ şeklinde tanımlanan $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. $\diamond$

(25) $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$, $f(x) = 2x - x^2$ fonksiyonunun eğer, varsa tersini bulunuz.

Çözüm: $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu örten fakat, birebir değildir. Buna göre tek değerli tersi yoktur. Şimdi f fonksiyonunun $(-\infty, 1]$ ve $[1, \infty)$ aralıklarına olan $g = f|_{(-\infty,1]}$ ve $h = f|_{[1,\infty)}$ kısıtlamalarını gözönüne alalım. $g : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan, g^{-1} tersi vardır. Tanım gereği, $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$ olduğundan $g^{-1}(2x - x^2) = x$ tir. Bu eşitlikte $2x - x^2 = y$ $(x = 1 - \sqrt{1 - y}$ olacaktır) alınırsa $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - y}$ elde edilir. O halde, g fonksiyonunun tersi $g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$ şeklinde tanımlanan $g^{-1} : (-\infty, 1] \to (-\infty, 1]$ fonksiyonudur.

Benzer şekilde, $h : [1, \infty,) \to (-\infty, 1]$ fonksiyonunun tersi $h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$ şeklinde tanımlanan $h^{-1} : (-\infty, 1] \to [1, \infty)$ fonksiyonu olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(26) $f : [0, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arccos x^2$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz.

Çözüm: $f : [0, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan, f^{-1} tersi vardır. Tanım gereği $f^{-1}(f(x)) = x$ olacağından,
$f^{-1}(\arccos x^2) = x$ dir. Bu eşitlikte $\arccos x^2 = y$ alınırsa, $(x = \sqrt{\cos y}$ olduğundan) $f^{-1}(y) = \sqrt{\cos y}$ elde edilir. O halde, f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \sqrt{\cos x}$ şeklinde tanımlanan $f^{-1} : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ fonksiyonudur. $\diamond$

(27) Aşağıda verilen bağıntıların yanlarında yazılı bölgelerde doğru olduklarını gösteriniz.

(a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad [-1, 1];$

(b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad [-1, 1];$

(c) $\arctan(-x) = -\arctan x, \quad \mathbb{R};$

(d) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x, \quad \mathbb{R};$

(e) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad [-1, 1];$

(f) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathbb{R};$

(g) $\arcsin(\sin x) = x, \quad [-\pi/2, \pi/2];$

(h) $\arccos(\cos x) = x, \quad [0, \pi];$

(i) $\cos(\arccos x) = x, \quad [-1, 1];$

(j) $\tan(\arctan x) = x, \quad \mathbb{R};$

(k) $\arctan(\tan x) = x, \quad (-\pi/2, \pi/2);$

(l) $\cot(\operatorname{arccot} x) = x, \quad \mathbb{R};$

(m) $\operatorname{arccot}(\cot x) = x, \quad (0, \pi);$

(n) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, (0, 1);$

(o) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, (0, 1);$

(p) $\arctan x = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (0, \infty);$

(q) $\arctan x + \arctan y = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}, \qquad x > 0,\ y > 0;$

(r) $\arctan x - \arctan y = \arctan\dfrac{x-y}{1+xy}, \qquad x > 0,\ y > 0;$

(s) $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y = \operatorname{arccot}\dfrac{xy-1}{x+y}, \qquad x > 0,\ y > 0;$

Çözüm: (b), (e), (n) ve (q) bağıntılarının doğru olduğunu gösterelim. Diğer bağıntıların ispatı okuyucuya birakılmıştır.

(b) $\arccos(-x) = \alpha$ olsun. O halde, $\cos\alpha = -x$ ve $0 \le \alpha \le \pi$ olur.

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow 0 \le \pi - \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = -x \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = x \end{array}\right\} \Rightarrow \pi - \alpha = \arccos x \Rightarrow \alpha = \pi - \arccos x$$

$\Rightarrow \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

(e) $\arcsin x = \alpha$ ve $\arccos x = \beta$ olsun. O halde,

$$x = \sin\alpha = \cos\beta \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

$\sin\alpha = \cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta)$ olduğu açıktır.

$$0 \leq \beta \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Böylece,

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad --\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

olduğu elde edilir. Bu nedenle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ ve buradan da $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, yani $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ eşitliğinin doğru olduğu görülür.

(n) $0 < x < 1$ olsun. $\arcsin x = \alpha$ dersek $x = \sin\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olur. Demek ki, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = +\sqrt{1 - x^2}$ olur. Buradan da $\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}$ dir. Dolayısı ile, istenen

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$$

eşitliğinin doğru olduğu görülür.

(q) $\arctan x = \alpha$, $\arctan y = \beta$, $x > 0$, $y > 0$ olsun. Bu durumda, $x = \tan\alpha$, $y = \tan\beta$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olur. O halde,

$$0 < \alpha + \beta < \pi, \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1 - xy}{x + y}$$

$0 < \alpha + \beta < \pi$ olduğundan, son eşitlikten $\alpha + \beta = \operatorname{arccot}\frac{1 - xy}{x + y}$ ve dolayısı ile istenen bağıntının doğruluğu elde edilir. $\diamond$

(28) Aşağıda verilen bağıntıların yanlarında yazılı bölgelerde doğru olduklarını gösteriniz.

(a) $\operatorname{arcsin} hx = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $\mathbb{R}$;

(b) $\operatorname{arccos} hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $[1, +\infty)$;

(c) $\operatorname{arctan} hx = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $(-1, 1)$;

(d) $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Çözüm: (a) ve (c) önermelerinin doğruluğunu görelim. (b) ve (d) önermelerinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir.

(a) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sinh y = x$ olsun.

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \quad \text{veya} \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

denklemini çözelim. $e^y > 0$ olduğundan,

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1} \;\; (e^y > 0 \;\; \text{olduğundan, } e^y \neq x - \sqrt{x^2-1})$$

elde edilir. O halde,

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

ve buradan da $\operatorname{arcsin} hx = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \in \mathbb{R}$ bağıntısının doğru olduğu görülür.

(c) $x \in (-1, 1)$ olmak üzere $\tanh y = x$ olsun.

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \quad \text{veya} \quad (1-x)e^{2y} = 1 + x$$

denklemini y ye göre çözelim.

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

olur. Buradan da $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, $x \in (-1, 1)$ bağıntısının doğru olduğu görülür. $\diamond$

(29) Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

(a) $\arcsin(\sin 10)$; (b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

(c) $\arcsin(\cos 2x)$, $(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4})$; (d) $\cos(\pi \sinh(\ln 2))$.

Çözüm: (a) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için $\arcsin(\sin x) = x$ olduğundan, $y = \sin x$ fonksiyonunun periyodik ve $|3\pi - 10| < \frac{\pi}{2}$ olmasından faydalanırsak

$$\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(10 - 2\pi)) = \arcsin[\sin(\pi - (10 - 2\pi))]$$
$$= \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10$$

olur.

(b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ olur.

(c) $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \leq 2x - \dfrac{3\pi}{2} \leq 0$ ve $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ için $\arcsin(\sin x) = x$ olduğundan,

$$\arcsin(\cos 2x) = \arcsin(\sin(2x - \tfrac{3\pi}{2})) = 2x - \frac{3\pi}{2}$$

olur.

(d) $\sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ olduğundan,

$$\cos(\pi \sinh(\ln 2)) = \cos(\frac{\pi}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}))$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \cos\tfrac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur. $\diamond$

(30)

$$\cos x + \sin y = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \; y \in [\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{2}] \qquad (1.13)$$

kapalı şeklinde tanımlanan $f : [\pi, 2\pi] \to [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in [\pi, 2\pi]$ için $\cos x = p$, $p \in [-1, 1]$ dir. O halde, (1.13) ve $\sin y = -p$ denklemleri denktir. $-p \in [-1, 1]$ olduğundan, $\sin y =$

$-p$ denkleminin $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ aralığında tek bir çözümü vardır. Böylece, $f : [\pi, 2\pi] \longrightarrow [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun mevcut olduğu görülür. Bu f nin ifadesini bulmak amacıyla (1.13) denklemini

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) + \sin y = 0$$

veya

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - x + y}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - x - y}{2} = 0 \tag{1.14}$$

şeklinde yazalım. (1.14) den

$$\begin{cases} \sin \dfrac{\frac{\pi}{2} - x + y}{2} & = 0 \\ \cos \dfrac{\frac{\pi}{2} - x - y}{2} & = 0 \end{cases}$$

ve buradan da y için

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.15}$$

$$y = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

değerleri bulunur.

(1.15) durumunda $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow y \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}$ için $y \notin [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ dir. Demek ki, $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $y = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, f nin değeri olamaz. (1.16) durumunda, $x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow y \in [-\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 3$ için $y \in [-\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi] \subset [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ elde edilir. O halde, $k = 2$ için (1.16) dan

$$y = -x + \frac{7\pi}{2}. \ \ x \in [\pi, 2\pi]$$

ifadesi bulunur $\diamond$

(31) $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) > 0$ olduğundan f, $\mathbb{R}$ üzerinde alttan sınırlıdır. f, $\mathbb{R}$ üzerinde üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $(1-x^2)^2 \geq 0$ olduğundan, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1+x^4 \geq 2x^2$ veya $1 \geq \dfrac{2x^2}{1+x^4}$ eşitsizliği sağlanır. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $1+x^4 \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{x^2+1}{1+x^4} = \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{1+x^4} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

olur. Böylece, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $0 < \dfrac{x^2+1}{1+x^4} \leq \dfrac{3}{2}$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Bu ise, f nin $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı (hem alttan ve hem de üstten sınırlı) olması demektir. $\diamond$

(32) $x = 0$ noktasının her komşuluğunda $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun sınırsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = 0$ noktasının herhangi bir $(-\epsilon, \epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ komşuluğu ve herhangi bir $M > 0$ sayısı verilsin. $f(x_0) > M$ olacak şekilde bir $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ noktasının varolduğunu gösterelim. $\dfrac{2}{\pi(1+4n_0)} < \epsilon$ ve $\dfrac{\pi(1+4n_0)}{2} > M$ koşullarını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının mevcut olduğu açıktır. Örneğin, $n_0 > \max\{\frac{1}{4}[\![\frac{2M}{\pi} - 1]\!], \frac{1}{4}[\![\frac{2}{\pi\epsilon} - 1]\!]$ sayısı istenen koşulları sağlamaktadır.

$x_0 = \dfrac{2}{\pi(1+4n_0)}$ olsun. O halde, $|x_0| < \epsilon$ ve

$$f(x_0) = \frac{\pi(1+4n_0)}{2} \sin\frac{\pi(1+4n_0)}{2} = \frac{\pi(1+4n_0)}{2} > M$$

olduğu elde edilir. Bu ise f nin $x = 0$ noktasının her $(-\epsilon, \epsilon)$ komşuluğunda sınırsız olması demektir. $\diamond$

Not: $E \subset \mathbb{R}$ kümesi ve E üzerinde sınırlı $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$$m(f) = m_E(f) = \inf\{f(x) : x \in E\}$$
$$M(f) = M_E(f) = \sup\{f(x) : x \in E\}$$

sayılarına f nin E üzerinde sırasıyla infimumu (en büyük alt sınırı) ve supremumu (en küçük üst sınırı) denir. $\bullet$

(33) $f : [0,+\infty) \to [0,1),\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonunun infimumunu ve supremumunu bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in [0,+\infty)$ için $0 \le f(x) < 1$, yani $\mathcal{R}(f) = [0,1)$ olduğu ve dolayısıyla, f nin $(0,\infty)$ üzerinde sınırlı olduğu görülür. sup ve inf özelliklerine göre f nin $[0,\infty)$ üzerinde sonlu infimumu ve supremumu vardır.

$\forall x \in [0,+\infty)$ için $f(x) > 0$ ve hem de $f(0) = 0$ olduğundan

$$m(f) = \inf\{\frac{x}{1+x} : x \in [0,+\infty)\} = 0$$

dir. Şimdi

$$M(f) = \sup\{\frac{x}{1+x} : x \in [0,+\infty)\} = 1$$

olduğunu gösterelim.

(a) $\forall x \in [0,+\infty)$ için $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} < 1$ dir.

(b) $0 < \forall\epsilon < \dfrac{1}{2}$ iįn $\dfrac{1-\epsilon}{\epsilon} < x_\epsilon$

koşullarını sağlayan $x_\epsilon \in (1,\infty)$ noktası için

$$f(x_\epsilon) = \frac{x_\epsilon}{1+x_\epsilon} > 1-\epsilon$$

olur. O halde, supremumun karakteristik özellikleri dolayısıyla $M(f) = 1$ dir.

$m(f) = 0 \in \mathcal{R}(f),\ f(0) = 0$ ve $M(f) \notin \mathcal{R}(f)$ olduğundan f, $[0,+\infty)$ üzerinde mutlak minimuma sahiptir. Fakat mutlak maksimum değerine sahip değildir. $\diamond$

(34) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde

(a) $y = |f(x)|$; (b) $y = f(|x|)$;
(c) $|y| = f(x)$; (d) $|y| = f(|x|)$;

bağıntılarının grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız. $y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak yukarıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

Çözüm:

(a) $y = f(x)$ in grafiği biliniyorsa, $y = |f(x)|$ in grafiği, $f(x) \geq 0$ bölgesinde aynı kalarak ve $f(x) < 0$ bölgesinde de x eksenine göre simetriği alınarak elde edilir. Sonuçta $y = |f(x)|$ in grafiği çizilmiş olur.

(b) $y = f(x)$ in grafiği $x \geq 0$ bölgesinde aynı bırakılarak $x < 0$ bölgesindeki kısmının y eksenine göre simetriği alınarak elde edilir. Sonra $x < 0$ bölgesindeki kısmı ihmal edilir. Sonuçta $y = f(|x|)$ in grafiği çizilmiş bulunur.

(c) f nin $\mathcal{D}(f)$ bölgesinin $\mathcal{D}_+(f) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \geq 0\}$ alt kümesini gözönüne alalım. $x \in \mathcal{D}(f)$ için $|y| = f(x)$ eşitliği $y = f(x)$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\mathcal{D}_+(f)$ üzerinde tanımlı iki tane $y_1 = f(x)$ ve $y_2 = -f(x)$ fonksiyonları elde edilir. $\mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f) \neq \emptyset$ ise $\forall x \in \mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f)$ için $f(x) < 0$ olduğundan $|y| = f(x)$ denkleminden hiç bir fonksiyon tanımlanamaz. Böylece, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği bilindiğinde $|y| = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $f(x) \geq 0$ bölgesinde aynı bırakılarak bu kısmın x eksenine simetrisi eklenir. Sonra $f(x) < 0$ bölgesindeki (Eğer, $\mathcal{D}(f)\backslash\mathcal{D}_+(f) \neq \emptyset$) kısmı ihmal edilir. Sonuçta $|y| = f(x)$ in grafiği çizilmiş olur.

(d) $y = f(|x|)$ in grafiği bilindiğinde $|y| = |f(x)|$ in grafiği (c) önermesinde gösterildiği gibi çizilir.

Şimdi $y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak $y = |f(x)| = |x^2 - 2x|$, $y = f(|x|) = x^2 - 2|x|$, $|y| = f(x) = x^2 - 2x$ ve $|y| = |f(|x|)| = |x^2 - 2|x||$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. (Bkz Şekil 1.32; 1.33; 1.34; 1.35; 1.36).

◇

(35) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $c \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere

$$y = af(bx + c)$$

tipinden fonksiyonların grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız.

Çözüm: (a) $y = f(x)$ ve $y = f(bx)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu fonksiyonlar için $y_1 = f(x)$ ve $y_2 = f(bx)$ iken x yerine x_1/b yazıldığında $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(b\frac{x_1}{b}) = f(x_1) = y_1$ elde edilir. Bu durumda, (x, y) noktası $y = f(x)$ in grafiği üzerinde bir nokta ise, $(x/b, y)$ noktası da $y = f(bx)$ in grafiği üzerinde bir noktadır diyebiliriz.
(b) $y = f(bx)$ ve $y = f(bx+c) = f(b(x+\frac{c}{b}))$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Eğer, $bx + c = x_1$ alınırsa $x = (x_1 - c)/b$ ve eğer $bx = x_1$ alınırsa $x = x_1/b$ bulunur. Bu değerler arasındaki fark c/b dir. O halde, $y = f(bx)$ eğrisi $c > 0$ iken c/b birim sola ($c < 0$ iken c/b birim sağa) kaydırılırsa $y = f(bx + c)$ in grafiği çizilmiş olur.
(c) $y = f(bx + c)$ ve $y = af(bx + c)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Eğer, $y_1 = f(bx + c)$ ve $y_2 = af(bx + c)$ alınırsa, bu durmda $y_2 = a.y_1$ olur. Yani, y_2 ordinatı y_1 in a katıdır. Demek ki, $y = af(bx + c)$ nin grafiği, $y = f(bx+c)$ nin grafiği üzerindeki bir nokta (x, y) iken (x, ay) noktalarını bulup birleştirilmesi ile elde edilir. $\diamond$

(36) Problem 33 ten yararlanarak aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

$$(a) \quad y = \frac{3x-2}{2x+1}; \quad (b) \quad y = \log_2(1-3x); \quad (c) \quad y = \sin(2x + \tfrac{\pi}{4})$$

Çözüm:

(a) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}\backslash\{-\dfrac{1}{2}\}$ ve $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$y = \frac{\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{7}{2}}{2x+1} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{7}{4}}{x + \frac{1}{2}}$$

olduğu açıktır. Eğer, $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ alınırsa verilen fonksiyon $y = \dfrac{7}{4}f(x+\frac{1}{2}) + \dfrac{3}{2}$ şeklinde yazılabilir.

Şekil 1.37 ve Şekil 1.38 de $y = f(x) = -\dfrac{1}{x}$ ve $y = \dfrac{7}{4}f(x+\frac{1}{2}) + \dfrac{3}{2}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

(b) $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 3x > 0\} = (-\infty, \frac{1}{3})$. Şekil 1.39, 1.40, 1.41 ve 1.42 de sırasıyla $y = \log_2 x$, $y = \log_2 3x$, $y = \log_2(-3x)$ ve $y = \log_2(1-3x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

(c) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ ve $y = sin(2x + \frac{\pi}{4})$ fonksiyonlarının grafikleri sırası ile şekil 1.43, 1.44 ve 1.45 te verilmiştir.

$\diamond$

Not: $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği belli iken, denklemi $y = f(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ olan fonksiyonun grafiği $y = f(x)$ eğrisi $k > 0$ ise k birim yukarıya, $k < 0$ ise k birim aşağıya kendisine paralel olarak kaydırılarak çizilir. $\bullet$

1.21 Ek Problemler

(37) $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x$ fonksiyonu için

$(a)\ f(0);$	$(b)\ f(\frac{\pi}{6});$	$(c)\ f(\frac{\pi}{4});$
$(d)\ f(\frac{\pi}{3});$	$(e)\ f([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]);$	$(f)\ f((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}));$
$(g)\ f([0,\frac{\pi}{6}]);$	$(h)\ f([0,2\pi]);$	$(i)\ f^{-1}(0);$
$(j)\ f^{-1}(\frac{1}{2});$	$(k)\ f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2});$	$(l)\ f^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2});$
$(m)\ f^{-1}([-1,1]);$	$(n)\ f^{-1}((-1,1));$	$(o)\ f^{-1}([0,\frac{1}{2}]).$

ifadelerini bulunuz.

Cevap:

$(a)\ 0;$	$(b)\ \dfrac{1}{2};$	$(c)\ \dfrac{\sqrt{2}}{2};$
$(d)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2};$	$(e)\ [-1,1]$	$(f)\ (-1,1);$
$(g)\ [0,\frac{1}{2}];$	$(h)\ [-1,1];$	$(i)\ k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$
$(j)\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi;$	$(k)\ (-1)^k\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$	$(l)\ (-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi;$
$(m)\ \mathbb{R};$	$(n)\ \mathbb{R}\{\pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\};$	

$$(o)\quad \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+\tfrac{1}{6})\pi]\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(2k+\tfrac{5}{6})\pi,(2k+1)\pi]\Big)\ .$$

(38) Aşağıda verilen $f : [0,1] \to [0,3]$ fonksiyonlarından

(a) $f(x) = 3\sin\frac{x\pi}{2}$; (b) $f(x) = \tan\frac{x\pi}{4}$; (c) $f(x) = 3^x$;

(d) $f(x) = 12(x - \dfrac{1}{2})^2$; (e) $f(x) = 2|x+2| - 3$.

hangisi birebir, örten ve birebir örtendir.

Cevap: (a) Birebir ve örten; (b) birebir; (c) birebir; (d) örten; (e) birebir.

(39) $f(x) = (1+x)^4 - (1-x)^4$ fonksiyonu için

(a) $f(3)$; (b) $f(a) + f(-a)$; (c) $f(b) - 1$;

(d) $f(b-1)$; (e) $f(\frac{1}{p})$; (f) $\dfrac{1}{f(p)}$.

ifadelerini bulunuz.

Cevap: (a) 240 ;(b) 0 ;(c) $8b^3 + 8b - 1$; (d) $8b^3 - 24b^2 + 32b - 16$; (e) $\dfrac{p^2+1}{p^3}$;(f) $\dfrac{1}{8p(1+p^2)}$.

(40)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - |x|, & x > -1 \text{ ise },\\ 2^{x+1}, & x \le -1 \text{ ise }. \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(-4)$, $f(-1)$, $f(-1/2)$, $f(1)$ ve $f(1984)$ değerlerini bulunuz.

Cevap: $\dfrac{1}{8}$; 1; $-1,5$; 1; 1984.

(41) $f(x) = c_1\cos ax + c_2\sin ax$ fonksiyonunun $f(x+2) - 2\cos a\, f(x+1) + f(x) = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

(42) Aşağıdaki kurallarla tanımlanan reel değerli fonksiyonların tanım kümesini bulunuz.

(a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|+x}}$; (b) $y = \dfrac{x^2}{2|x|-3}$;

(c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}$; (d) $y = \dfrac{[\![x]\!]}{x+1}$;

(e) $y = \dfrac{1}{x - [\![x]\!]}$; (f) $y = \dfrac{x}{(9-x^2)^{\frac{2}{3}}}$;

(g) $y = \sqrt{x^2(x-2)}$; (h) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

(i) $y = \dfrac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6-35x-6x^2}}$; (j) $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$;

(k) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$; (l) $y = \log(3\sin^2 x - 4)$;

(m) $y = \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{x-1}}$; (n) $y = \log_x \log_{0,5}(\dfrac{4}{3} - 2^{x-1})$;

(o) $y = \log_{x+1}(x^2-3x+2)$; (p) $y = \dfrac{\log_{2x} 3}{\arccos(2x-1)}$;

(q) $y = \arctan \dfrac{x}{x^2-9}$; (r) $y = \cot \pi x + \arccos(2^x)$;

(s) $y = \log[\cos(\log x)]$; (t) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+9) + \sqrt{x^2-2x-8}$;

(u) $y = \arctan \dfrac{3-x}{x^2-4}$; (v) $y = \arccos(3+2^{-x})$;

(w) $y = \arcsin(1-x) + \log(\log x)$; (x) $y = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$;

(y) $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x}$; (z) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{\log\cos x}}$.

Cevap:

(a) $(0,+\infty)$; (b) $(-\infty,-\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2},+\infty)$;

(c) $(0,1) \cup (1,+\infty)$; (d) $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$;

(e) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$; ($f$) $(-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$;

(g) $\{0\} \cup [2,+\infty)$; (h) $(\frac{1}{2},1) \cup [3,+\infty)$;

(i) $(-6, \dfrac{-5\pi}{3}] \cup [\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{1}{6})$; ($j$) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{3\pi}{4}+k\pi]$;

(k) $x \neq 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$; ($l$) $\emptyset$;

(m)	$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$;	(n)	$(0,1)\cup(1,\log_2\frac{8}{3})$;
(o)	$(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$;	(p)	$(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$;
(q)	$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$;	(r)	$(-\infty,0)\backslash\{-n\},\ n\in\mathbb{N}$;
(s)	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(10^{(2k-\frac{1}{2})\pi},10^{(2k+\frac{1}{2})\pi})$;	(t)	$(-\infty,-3)\cup(-3,-2]\cup[4,\infty)$;
(u)	$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$;	(v)	$\emptyset$;
(w)	$(1,2]$;	(x)	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{2}+k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$;

(y) $(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,2k\pi))\cup(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi))$.

(z) $[(-1-\sqrt{5})/2,(1-\sqrt{5})/2]\cup[(\sqrt{5}-1)/2,(\sqrt{5}+1)/2]$;

(43) $y=f(u)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-1,0]$ olduğunda

(a)	$f(-x^2)$;	(b)	$f(x-1)$;	(c)	$f(2x)$;
(d)	$f(\frac{\lvert x\rvert}{x})$;	(e)	$f(x-\lvert x\rvert)$		

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

Cevap: (a) $[-1,1]$;(b) $[0,1]$;(c) $[\frac{-1}{2},0]$;(d) $(-\infty,0)$;(e) $[\frac{-1}{2},0]$.

(44) Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $f(x)=x$ ve $g(x)=\sqrt{x^2}$, $x\in(-\infty,\infty)$;

(b) $f(x)=x^3$ ve $g(x)=10^{\log x^3}$;

(c) $f(x)=3x^2-2x+1$, eğer, $x\in[1,2]$ ve $g(x)=3x^2-2x+1$, eğer $x\in[1,3]$ ise

(d) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ ve $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$;

Cevap: **(a)** Eşit değildir; **(b)** $(0,+\infty$ üzerinde eşittirler;
(c) Fonksiyonlar farklı kümelerde tanımlı olduklarından eşit değillerdir;
(d) $[1,+\infty)$ üzerinde eşittirler.

(45) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$ ve $(g\circ g)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1 \text{ ise},\\ 0, & |x|>1 \text{ ise};\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 2 \text{ ise},\\ 2, & |x|>2 \text{ ise}.\end{cases}$$

Cevap: $(f\circ f)(x)=1$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, & 1\le |x|\le \sqrt{3} \text{ ise},\\ 0, & |x|<1 \text{ ve } |x|>\sqrt{3} \text{ ise};\end{cases}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1 \text{ ise},\\ 2, & |x|>2 \text{ ise};\end{cases}$$

$$(g\circ g)(x)=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\le 2 \text{ ise},\\ -2, & |x|>2 \text{ ise}.\end{cases}$$

(46) Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için $(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$(a)\quad f(x)=\sqrt{4-2^x},\qquad g(x)=x^2-3x+2;$

$(b)\quad f(x)=\arcsin x,\qquad g(x)=x^2-9x+20;$

$(c)\quad f(x)=\log(x^2-4x+1),\qquad g(x)=x^2-1.$

Cevap: (a) $[0,3]$; (b) $[\frac{9-\sqrt{89}}{2},0]$; (c) $[9,\frac{9+\sqrt{89}}{2}]$.

(47) $f(x)=\sin x$ olduğuna göre $f[f^2(x-1)]$ ve $f^2[f(x)-1]$ fonksiyonlarının ifadelerini bulunuz.

Cevap: $f[f^2(x-1)]=\sin[\sin^2(x-1)]$, $f^2[f(x)-1]=\sin^2[\sin x-1]$.

(48) Aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

$(a)\quad f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^3-5};\qquad (b)\quad f(x) = \sin(x+1);$

$(c)\quad f(x) = |x+1| + |x-1|;\qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} x^3 + \sin x, & x \geq 0 \text{ ise}, \\ -x^3 - \sin x, & x < 0 \text{ ise}; \end{cases}$

$(e)\quad f(x) = \sqrt{x^3+x^2-8};\qquad (f)\quad f(x) = \arcsin x + \arccos x;$

$(g)\quad f(x) = \cos(\arccos x).$

Cevap:

(a) ne tektir ne de çifttir; (b) ne tektir ne de çifttir; (c) çifttir;
(d) çifttir; (e) ne tektir ne de çifttir ; (f) çifttir;
(g) tektir .

(49) Problem (14) teki örneklerden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların çift veya tek olup olmadığını inceleyiniz.

(a) $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{1-\cos x};$ (b) $f(x) = \sin(\tan x);$
(c) $f(x) = \cot(\cos x);$ (d) $f(x) = \cot(\text{arccot} x);$
(e) $f(x) = \arcsin(\arccos x);$ (f) $f(x) = \sin(2x - \arctan x).$

Cevap: **(a)** çifttir; **(b)** tektir; **(c)** çifttir; **(d)** tektir; **(e)** ne tektir ne de çifttir; **(f)** çifttir .

(50) Problem (17) deki önermeden faydalanarak aşağıda verilen fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

(a) $f(x) = \sin\frac{x}{3};$ (b) $f(x) = \cos 5x;$
(c) $f(x) = \tan(3x+5);$ (d) $f(x) = \sin^2(x-1);$
(e) $f(x) = \sin x + \cos 2x;$ (f) $f(x) = \cos 2x \cos 6x.$

Cevap: (a) 6π; (b) $\dfrac{2\pi}{5}$; (c) $\dfrac{\pi}{3}$; (d) π; (e) 2π; (f) $\dfrac{\pi}{2}$.

(51) Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olmadıklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = \sin\frac{1}{x},\quad x \neq \dfrac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\};$

(b) $f(x) = \cos x^2$.

(52) Aşağıdaki fonksiyonların monotonluk karakterlerini inceleyiniz.

(a) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$; (b) $f(x) = x + \arctan x$;

(c) $f(x) = \log(x^2 - 6x + 10)$; (d) $f(x) = \log^3 x + x^5$;

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 1},\ x \neq 1$; (f) $f(x) = x^5 \log^7 x,\ x \geq 1$;

(g) $f(x) = \arctan(x^2 - 4x + 8)$; (h) $f(x) = \arctan^4 x$;

(i) $f(x) = x^3 + \arcsin x$; (j) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 20)$;

(k) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos^2 x}$.

Cevap:

(a) $(0, +\infty)$ da artan, $(-\infty, 0)$ da azalandır (b) artandır ;
(c) $(-\infty, 3)$ de azalan, $(3, +\infty)$ da artandır ; (d) artandır ;
(e) $(-\infty, 2)$ de azalan $(2, +\infty)$ da artandır ; (f) rartandır ;
(g) $(-\infty, 0)$ da azalan, $(0, +\infty$ da artandır ; (i)artandır ;
(j) $(-\infty, 4)$ de artan $(4, +\infty)$ da azalandır ;
(k) $[0, \frac{\pi}{2})$ de artan, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ de azalandır.

(53) Aşağıdaki fonksiyonları çift olarak devam ettiriniz.

(a) $f(x) = \sin x + x \tan x, \quad 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$;

(b) $f(x) = x \log^3 x, \quad 0 < x < +\infty$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 2^x, & 0 \leq x < 1 \text{ ise,} \\ x^3 - x^2 + \log x, & 1 \leq x < 2 \text{ ise.} \end{cases}$

Cevap: **(a)** $f(x) = x \tan x - \sin x, \quad \dfrac{-\pi}{2} < x \leq 0$;

(b) $f(x) = -x \log^3(-x), \quad -\infty < x < 0$;

(c) $f(x) = \begin{cases} -x^3 - x^2 + \log(-x), & -2 < x \leq -1 \text{ ise,} \\ x^4 - 3x^2 + 2^{-x}, & -1 < x \leq 0 \text{ ise.} \end{cases}$

(54) Aşağıdaki fonksiyonları tek olarak devam ettiriniz.

(a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \qquad 0 \le x < +\infty;$
(b) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad 0 \le x < +\infty;$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^4+1, & 0 \le x < 2 \text{ ise}, \\ x^3+6, & 2 \le x < 3 \text{ ise}. \end{cases}$

Cevap: (a) $f(x) = -\sin^4 - \cos^4 x, \ -\infty < x \le 0;$
(b) $f(x) = -\log(-x + \sqrt{x^2+1}) = \log(x + \sqrt{x^2+1}), -\infty < x \le 0;$
(c) $f(x) = \begin{cases} -6+x^3, & -3 < x \le 2 \text{ ise}; \\ -x^4, & -2 < x \le 0 \text{ ise}. \end{cases}$

(55) Aşağıdaki verilen fonksiyonların terslerini bulunuz.

(a) $y = \dfrac{4-x}{4+x};$ (b) $y = \dfrac{8+x^3}{8-x^3};$
(c) $y = 2x - x^2 \quad x \ge 1;$ (d) $y = x^2 + 4x, \quad x \le -2;$
(e) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}, \quad x \le -1;$ (f) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad 1 \le x \le 1;$
(g) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x \ge 1;$ (h) $y = \sin^3 x, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2};$
(i) $y = \sin^3 x, \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{3}.$

Cevap:

(a) $x = \dfrac{4(1-y)}{1+y}, \ y \ne -1;$ (b) $x = 2\sqrt[3]{\dfrac{y-1}{y+1}}, \ y \ne -1;$
(c) $x = 1 + \sqrt{1-y}, \ y \ge 1;$ (d) $x = -2 - \sqrt{4+y}, \ y \ge -4;$
(e) $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, \ -1 \le y < 0;$ (f) $x = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}, & 0 < |y| \le 1 \ ; \\ 0, & y = 0 \ ; \end{cases}$
(g) $x = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}, -0 < y \le 1;$ (h) $x = \arcsin \sqrt[3]{y}, -1 \le y \le 1;$
(i) $x = \pi - \arcsin \sqrt[3]{x}, -1 \le y \le 1.$

(56) Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

(a) $\arccos(-\dfrac{1}{2});$ (b) $\arcsin h(\sqrt{2});$

(c) $\sin(\pi \cosh(\ln 2));$ (d) $\arcsin(\cos 2x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

(e) $\cos(2 \arctan x^2)$

Cevap: (a) $\dfrac{2\pi}{3}$; (b) $\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; (c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (d) $\dfrac{\pi}{2} - 2x$;
(e) $\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$.

(57) $\cos x + \sin y = 0$, $x \in [\pi, 2\pi]$, $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ kapalı şekilde tanımlanan $f : [\pi, 2\pi] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Cevap: $y = f(x) = x - \dfrac{\pi}{2}.$

(58) $\sin x - \cos y = 0$, $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$,$y \in [4\pi, 5\pi]$ kapalı şekilde tanımlanan $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \to [4\pi, 5\pi]$ fonksiyonunun ifadesini bulunuz.

Cevap: $y = f(x) = -x + \dfrac{13\pi}{2}.$

(59) Aşağıda verilen fonksiyonların sınırlı olduklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = \dfrac{x-4}{2-\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 4);$ (b) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^4-1};$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+\sqrt[3]{x^4}}, \quad x \in (-\infty, -1);$ (d) $f(x) = 2^{\sin x};$

(e) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-\infty, 0);$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \ln^2 x};$

(g) $f(x) = \log_x(1+x), \quad x \in [2, +\infty);$ (h) $f(x) = \tan x \cos 3x;$

(i) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cot x - 1};$ (j) $f(x) = \dfrac{2\cos x}{\pi - \ln^2 x};$

(k) $f(x) = \cot x - \dfrac{1}{\sin x}, x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}].$

(60) Aşağıda verilen fonksiyonların sınısız olduklarını gösteriniz.

$(a)\quad f(x) = x^3 - 3x;$ $\qquad (b)\quad f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1},\ x \in (-\infty, -2];$

$(c)\quad f(x) = \dfrac{3^x}{x},\quad x \in (-\infty, 0);$ $\qquad (d)\quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}, x \in (0, +\infty);$

$(e)\quad f(x) = x \sin x;$ $\qquad (f)\quad f(x) = \log_x(1+x),\quad x \in (1, 2];$

$(g)\quad f(x) = \dfrac{\cos}{x};$ $\qquad (h)\quad f(x) = \dfrac{1}{x - [\![\, x \,]\!]};$

$(i)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-4},\ x \in (-2, 2).$

(61) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen aralıklarda infimum ve supremumlarını bulunuz.

$(a)\quad f(x) = x^2 + 2,\ [-1, 3];$ $\qquad (b)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+1},\quad (-\infty, +\infty);$

$(c)\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2-4},\quad [-1, 1];$ $\qquad (d)\quad f(x) = \tan^2 x,\quad (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4});$

$(e)\quad f(x) = x + \dfrac{1}{x},\quad (\frac{1}{2}, 2);$ $\qquad (f)\quad f(x) = x - [\![\, x \,]\!],\quad (0, 1);$

Cevap:

$(a)\quad m(f) = 2,\quad M(f) = 11;$ $\qquad (b)\quad m(f) = 0,\quad M(f) = 1;$

$(c)\quad m(f) = -\dfrac{1}{3},\quad M(f) = -\dfrac{1}{4};$ $\qquad (d)\quad m(f) = 0,\quad M(f) = 1;$

$(e)\quad m(f) = 2,\quad M(f) = 2,5;$ $\qquad (f)\quad m(f) = 0,\quad M(f) = 1.$

(62) Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini ciziniz.

$(a)\quad f(x) = 2^{-|x|};$ $\qquad (b)\quad f(x) = \cos x - |\cos x|;$

$(c)\quad f(x) = \dfrac{1}{2}[\![\, (|x| - x) \,]\!];$ $\qquad (d)\quad f(x) = x - [\![\, x \,]\!] - \mathrm{Sgn} x;$

$(e)\quad f(x) = |x-1| + |x+1|;$ $\qquad (f)\quad f(x) = |\sin x| + |\cos x|;$

(g) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |1-2x| + 2$; (h) $f(x) = |\log_2 |x||$;

(i) $f(x) = -\arctan(2x-4)$; (j) $f(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) + \dfrac{3}{2}$;

(k) $f(x) = \sin 3x - \cos 3x$ (l); $f(x) = \arcsin(1-\frac{x}{2})$;

(m) $f(x) = 4\arccos(2-3x)$; (n) $f(x) = |x^2-4x+3| - (x^2-4x+3)$;

(o) $f(x) = 2^{|\log_2 x|}$.

(63) Aşağıda, denklemlerle verilen eğrileri ciziniz.

(a) $|y| = \sin x$; (b) $|y| = |x+1|$; (c) $|y| = -x^2+5x-4$;
(d) $|y| = 1-|x|$; (e) $|x| = y^2-1$; (f) $|x| = \cos y$.

(64) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini ciziniz.

(a) $f(x) = x\mathrm{Sgn}x$; (b) $f(x) = x\mathrm{Sgn}(\sin x)$;
(c) $f(x) = e^{\mathrm{Sgn}x}$; (d) $f(x) = \mathrm{Sgn}(\ln x)$;
(e) $f(x) = [\![\log x]\!]$; (f) $f(x) = \log x - [\![\log x]\!]$.